THE AUTOMORPHISM GROUP OF THE ACYCLIC CLOSURE OF A FREE GROUP(Topology, Complex Analysis and Arithmetic of Hyperbolic Spaces)

AUTHOR(S):

逆井, 卓也

数理解析研究所講究録
第1571巻 2007年 98-108

THE AUTOMORPHISM GROUP OF THE ACYCLIC CLOSURE OF A FREE GROUP

東京大学大学院数理科学研究科 逆井 卓也 (Takuya Sakasai)
Graduate School of Mathematical Sciences,
The University of Tokyo

1. はじめに

本稿は多様体の微分同相 (のアイソトピー類) の一般化のひとつとしてその多様体の間のホモロジー同境を考えたとき, それらをどのように分類したらよいか, ということをテーマとしています. 前半はそのための道具である群の acyclic closure と呼ばれる概念の説明を行い, 後半はそれを使って境界つき曲面などの基本群が自由群となるような多様体に対し, 自由群の acyclic closure やその自己同型群との関連を見ます. このように, 現在のところ主に代数的なアプローチをとっていますが, この対象はそれだけでは捉えきれないということもわかっており, 今後はより位相的, 幾何的な方法で研究をしていきたいと思っています.

2. STALLINGS の定理と多様体のホモロジー同境

群 G に対し, そのホモロジーは Eilenberg-MacLane 空間 $K(G,1)$ (i.e. $\pi_1 K(G,1)=G$, $i\geq 2$ に対し $\pi_i K(G,1)=0$ となる弧状連結な空間) を用いて, $H_*(G):=H_*(K(G,1))$ によって定義されるが, 低次の部分に関しては, 任意の $\pi_1 X=G$ なる弧状連結な空間を用いて,

$$H_1(G):=H_1(X)=G/[G,G],$$
$$\pi_2 X \xrightarrow{\text{Hurewicz}} H_2(X)\to H_2(G)\to 0 \quad (\text{完全列})$$

によって定義することもできる. (詳しくは [2] を参照.)

群準同型 $f:A\to B$ が 2-連結であるとは, f が誘導するホモロジーの間の準同型 $f:H_*(A)\to H_*(B)$ が1次のところで同型かつ2次のところで全射であることをいう. 次の Stallings の定理は本稿で中心的な役割を果たす.

定理 2.1 (Stallings [14]). A, B を群とし, $f:A\to B$ を 2-連結な準同型とするとき,

$$f:N_k(A)\to N_k(B)$$

は任意の $k\geq 2$ に対し同型となる.

ここで群 G に対し $N_k(G)$ は G の k 番目のべき零商であり, G の降中心列を $\Gamma^1(G)=G$, $\Gamma^i(G)=[\Gamma^{i-1}(G),G]$ $(i\geq 2)$ で定義したとき, $N_k(G):=G/(\Gamma^k(G))$ によって与えられる. 以下, 連結な空間 X に対し $N_k(X):=N_k(\pi_1 X)$ と書くことにする.

Stallings の定理のトポロジーへの応用として, 次のような状況を考える. 以下, 多様体はすべて滑らかであるとする. X をコンパクトで向き付けられた多様体とする. 技術的に簡

単にするため, X は連結かつ境界を持つとする. M を X から自分自身への標識付きのホモロジー同境とする. 具体的には, M は向き付けられた多様体であり, 標識と呼ぶ 2 つの埋め込み $i_+, i_- : X \to M$ があり,

(1) i_+ は向きを保ち, i_- は向きを保たない,
(2) $\partial M = i_+(X) \cup i_-(X)$ かつ $i_+(X) \cap i_-(X) = i_+(\partial X) = i_-(\partial X)$,
(3) $i_+, i_- : X \to M$ はホモロジーの同型を誘導する,
(4) $i_+|_{\partial X} = i_-|_{\partial X}$

を満たしているようなものを考える. このような 3 つ組 (M, i_+, i_-) を X **上のホモロジーシリンダー** と呼ぶことにする. $\pi_1 X$ や $\pi_1 M$ の定義に必要な基点は $i_+(X) \cap i_-(X)$ 上に共通にとることにする.

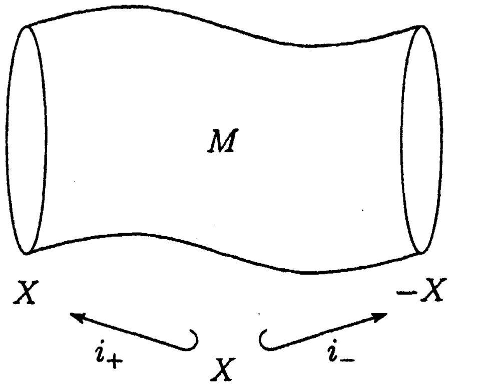

FIGURE 1. X 上のホモロジーシリンダー

2 つのホモロジーシリンダー (M, i_+, i_-), (M', i'_+, i'_-) が同型であることを, 微分同相 $\varphi : M \xrightarrow{\cong} M'$ であって $\varphi \circ i_+ = i'_+$, $\varphi \circ i_- = i'_-$ を満たすものが存在することとして定める. X 上のホモロジーシリンダーの同型類のなす集合を $\mathcal{C}(X)$ と書くことにする. $(M, i_+, i_-), (N, j_+, j_-) \in \mathcal{C}(X)$ に対し,

$$(M, i_+, i_-) \cdot (N, j_+, j_-) := (M \cup_{i_-^{-1} \circ j_+} N, i_+, j_-)$$

と定めることで $\mathcal{C}(X)$ にはモノイドの構造が入る. $\mathcal{C}(X)$ の単位元は $(X \times I, \mathrm{id} \times \{1\}, \mathrm{id} \times \{0\})$ (角を解消し, $(\mathrm{id} \times \{1\})(\partial X)$ と $(\mathrm{id} \times \{0\})(\partial X)$ を $(\mathrm{id} \times \{1/2\})(\partial X)$ まで半分づつ伸ばしてくっつけておく) で与えられる. いま, このモノイド $\mathcal{C}(X)$ の構造を調べたい.

先に述べた群の低次のホモロジーの定義より, $(M, i_+, i_-) \in \mathcal{C}(X)$ に対し, $i_+, i_- : \pi_1 X \to \pi_1 M$ は 2-連結となっていることがわかる. よって Stallings の定理より, 各 $k \geq 2$ に対し $i_+, i_- : N_k(X) \xrightarrow{\cong} N_k(M)$ となり, 写像

$$\sigma_k : \mathcal{C}(X) \to \mathrm{Aut}(N_k(X)) \qquad ((M, i_+, i_-) \mapsto (i_+)^{-1} \circ i_-)$$

を構成することができる. この σ_k はモノイド準同型となっており. こうして $\mathcal{C}(X)$ の構造を代数的に調べる 1 つの手法が得られる.

例 2.2. $\mathcal{M}(X)$ を X の微分同相で境界上恒等写像となるもののアイトソピー類のなす群とする. このとき,

$$\mathcal{M}(X) \to \mathcal{C}(X) \qquad ([\varphi] \mapsto (X \times I, \mathrm{id} \times \{1\}, \varphi \times \{0\}))$$

という写像が定義され，これは準同型となる．この準同型と σ_k の合成を考えると，それは $\mathcal{M}(X)$ の $\pi_1 X$ への作用

$$\sigma : \mathcal{M}(X) \to \mathrm{Aut}(\pi_1 X)$$

から誘導される自然な準同型と一致する．

注意 2.3. 例 2.2 で見た準同型 $\mathcal{M}(X) \to \mathcal{C}(X)$ は必ずしも単射とは限らない．実際，$[\varphi] \in \mathrm{Ker}(\mathcal{M}(X) \to \mathcal{C}(X))$ のとき，定義から φ は擬アイソトピー (pseudo isotopy) と呼ばれるものになる (とくに，恒等写像とホモトピックである)．擬アイソトピーが必ずアイソトピーとなるかどうかは，X の位相的性質に強く依存する．一方で，X が曲面のとき，擬アイソトピーは必ずアイソトピーとなることが知られているため，$\mathcal{M}(X) \to \mathcal{C}(X)$ は単射となる．

この節のおわりに，モノイド $\mathcal{C}(X)$ から群を構成する 1 つの方法を述べる．(M, i_+, i_-), $(N, j_+, j_-) \in \mathcal{C}(X)$ が**ホモロジー同境**であることを，向き付けられたコンパクトな多様体 W であって

(1) $\partial W = M \cup (-N)/(i_+(x) = j_+(x),\ i_-(x) = j_-(x)) \quad x \in X$,
(2) 埋め込み $M \hookrightarrow W, N \hookrightarrow W$ はホモロジーの同型を誘導する，

を満たすものが存在することとして定義する．$\mathcal{C}(X)$ のホモロジー同境類のなす集合を $\mathcal{H}(X)$ とすると，$\mathcal{H}(X)$ には $\mathcal{C}(X)$ から積構造が誘導され，群となる．(M, i_+, i_-) の逆元は $(-M, i_-, i_+)$ で与えられる．上で述べた σ_k は群準同型

$$\sigma_k : \mathcal{H}(X) \to \mathrm{Aut}(N_k(X))$$

を誘導することが確かめられる．

3. 群の ACYCLIC CLOSURE

前節でみた準同型

$$\sigma_k : \mathcal{C}(X) \to \mathrm{Aut}(N_k(X)) \qquad (k \geq 2)$$

に関して σ_k を $\mathcal{M}(X)$ に制限した (引き戻した) ものを考えると，それらは $\sigma : \mathcal{M}(X) \to \mathrm{Aut}(\pi_1 X)$ からすべて誘導されていた．いま，これと同様なものが $\mathcal{C}(X)$ に対しても存在するかどうかを考えてみたい．つまり，下の図式を可換にするような ??? に入るべきものは何か，という問題を以下考える．

$$\begin{tikzcd}
\sigma_k : \mathcal{C}(X) \arrow[r] & ??? \arrow[r] & \mathrm{Aut}(N_k(X)) \arrow[d, equal] \\
\sigma_k : \mathcal{M}(X) \arrow[r, "\sigma"] \arrow[u] & \mathrm{Aut}(\pi_1 X) \arrow[r] \arrow[u, dotted, "?"] & \mathrm{Aut}(N_k(X))
\end{tikzcd}$$

この問題のひとつの答えとして，$\pi_1 X$ のべき零完備化 $\pi_1 X^{\mathrm{nil}} := \varprojlim N_k(X)$ を使うというものがある．実際，群 G が有限生成であるとき，Bousfield [1] によって $N_k(G) \cong N_k(G^{\mathrm{nil}})$ となることが示されており，$\mathrm{Aut}(G^{\mathrm{nil}})$ から $\mathrm{Aut}(N_k(G))$ への自然な準同型を構成することができる．しかしながら，一般にべき零完備化は集合として濃度が大きくなってしまい，扱いが難しくなる．そこで，以下では Levine による群の acyclic closure と呼ばれる概念を導入し，それを用いて，集合として適度な大きさの群の自己同型群として，すべての σ_k たちを誘導する準同型を実現する．

群の acyclic closure の定義とその基本的性質については定義 3.1 以降に述べるが，その定義は一見複雑なため，まず少し寄り道をしてその背景にあるものを述べたい．

$(M,i_+,i_-)\in\mathcal{C}(X)$ に対し，$\mathrm{Aut}(\pi_1X)$ の元を自然に対応させることができれば何の問題もない．しかしながら一般にはそれは無理であり，その最も大きな原因として「π_1M が大きくなりうる」ということが挙げられる．

$$\begin{tikzcd} \pi_1 X \arrow[r, bend left, "i_+"] \arrow[r, bend right, "i_-"'] & \pi_1 M \arrow[l, dotted, "\times" description] \end{tikzcd}$$

そこで π_1M がどのくらい大きくなるかを以下の考察を通して「下から評価」してみる．

いま，X の次元は 2 以上であるとする．$(M,i_+,i_-)\in\mathcal{C}(X)$ から別の $\mathcal{C}(X)$ の元を構成し，その基本群を調べてみる．まず，$M\times\{1\}\subset M\times I$ に k 個の 1-ハンドル $h_1^1,\dots h_k^1$ を接着する．そのあとで，同じく k 個の 2-ハンドル $h_1^2,\dots,h_k^2$ を，2-ハンドル h_i^2 の接着球面 a_i と 1-ハンドル h_j^1 のベルト球面 b_j が境界において代数的な交差数に関して $(a_i,b_j)=\delta_{i,j}$ を満たすように接着する．こうしてできた多様体

$$W:=M\times I\cup h_1^1\cup\cdots\cup h_k^1\cup h_1^2\cup\cdots\cup h_k^2$$

の境界において，$M=M\times\{0\}$ の反対側にできた多様体を M' とする (i.e. $\partial W=M\cup -M'$)．

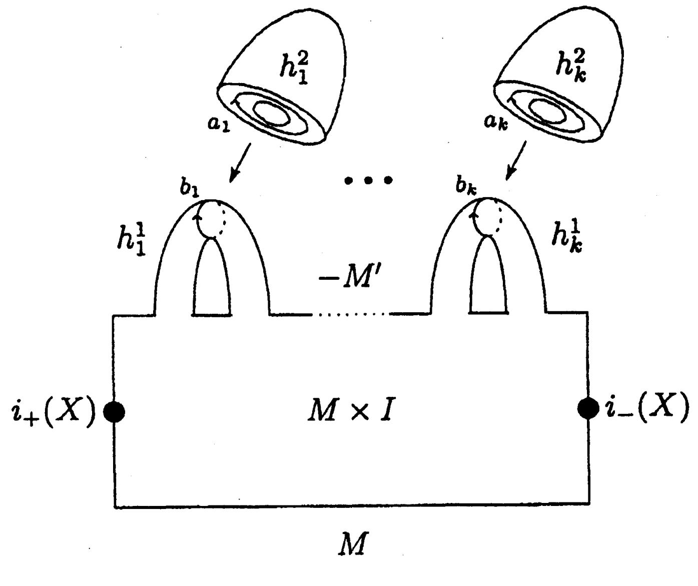

FIGURE 2. 多様体 W

このとき，接着に関する条件から，$H_*(W,M)=0$ であることがわかり，Poincaré-Lefschetz 双対性を使うなどすれば，$H_*(W,M')=H_*(M',i_\pm(X))=0$ となることを従う．これより，$(M',i_+,i_-)\in\mathcal{C}(X)$ となる．(実際，$(M,i_+,i_-)=(M',i_+,i_-)\in\mathcal{H}(X)$ となっている．)

いま，π_1W を調べてみると，k 個の 1-ハンドルに対応する基本群の元を $x_1,\dots,x_k$ としたとき，2-ハンドルの接着に関する条件から

$$w_1,\dots,w_k\in\mathrm{Ker}\left(\pi_1M*\langle x_1,\dots,x_k\rangle\xrightarrow{\mathrm{proj}}\langle x_1,\dots,x_k\rangle\to H_1(\langle x_1,\dots,x_k\rangle)\right)$$

を用いて

$$\pi_1 W = \frac{\pi_1 M * \langle x_1, \ldots, x_k \rangle}{\langle x_1 w_1^{-1}, \ldots, x_k w_k^{-1} \rangle}$$

の形に書ける. 逆にこのような形の群はすべて $\pi_1 W$ として実現される. W の次元は 4 以上であるから自然な準同型 $\pi_1 M' \to \pi_1 W$ は全射となり (次元が 5 以上なら同型), その意味で $\pi_1 M'$ の「下からの評価」が得られた.

以上の考察を踏まえて, 群の acyclic closure を導入する. 群の acyclic closure (HE-closure とも呼ばれる) という概念は, 群の algebraic closure という概念の類似として Levine によって [8, 9] において定義されたが, これを扱った文献は少ない. 以下, その定義と基本的性質について簡単にまとめるが, 必要な議論や証明は [8] の中の algebraic closure に関するものを適宜書きかえることによって得られる. ([3] も参照.)

定義 3.1. G を群とし, $F_k := \langle x_1, \ldots, x_k \rangle$ を階数 k の自由群とする.
(1) $\mathrm{Ker}\left(G * F_k \xrightarrow{\mathrm{proj}} F_k \to H_1(F_k)\right)$ の k 個の元 $w_1, w_2, \ldots, w_k$ に対し, $x_1, x_2, \ldots, x_k$ を変数とする "方程式"

$$(\mathrm{S}) : \begin{cases} x_1 &= w_1(x_1, x_2, \ldots, x_k) \\ x_2 &= w_2(x_1, x_2, \ldots, x_k) \\ &\vdots \\ x_k &= w_k(x_1, x_2, \ldots, x_k) \end{cases}.$$

を考える. 方程式 (S) を *acyclic system* と呼ぶ.
(2) G 上のすべての acyclic system (k もすべて動かす) に対してその "解" が一意的に存在するとき, G は *acyclically closed* (以下, AC と略記する) であるという. ここで, acyclic system の解とは図式

$$\begin{array}{ccc} G & & \\ \downarrow & \searrow^{\mathrm{id}} & \\ \dfrac{G * F_k}{\langle x_1 w_1^{-1}, \ldots, x_k w_k^{-1} \rangle} & \xrightarrow{\varphi} & G \end{array}$$

を可換にする準同型 φ のことである.

例 3.2. 群 G の元 g_1, g_2, g_3 に対し,

$$\begin{cases} x_1 &= g_1 x_1 g_2 x_2 x_1^{-1} x_2^{-1} \\ x_2 &= x_1 g_3 x_1^{-1} \end{cases}$$

は G 上の acyclic system となっている. G が可換群のとき, この system は唯一の解 $(x_1, x_2) = (g_1 g_2, g_3)$ を持つ.

例 3.2 から容易に想像がつくように, 一般に可換群は AC である. また, AC-群の中心拡大や直極限, 射影極限もまた AC-群であることを示すことができる. とくに, べき零群やべき零完備化が AC であることが従う. 以下は AC-完備化というべき事実である.

定理 3.3. 任意の群 G に対し, 次を満たす群 G^{acy} と準同型 $\iota_G : G \to G^{\mathrm{acy}}$ が同型を除いて一意的に存在する:

(1) G^{acy} は AC-群.

(2) $f: G \to A$ を A が AC-群であるような準同型とするとき $\widetilde{f} \circ \iota_G = f$ をみたすような準同型 $\widetilde{f}: G^{\mathrm{acy}} \to A$ が一意的に存在する.

定理 3.3 で得られる G^{acy} を G の *acyclic closure* という. G^{acy} は, 体から代数閉体を作る方法と同様にして, まず G にすべての G 上の acyclic system の解を付け加え, その後で解の一意性が得られるようにしかるべき部分群によって商をとることによって得られる. とくに, G が集合として可算であれば G^{acy} もまた可算であることがわかる.

群の acyclic closure は次のような著しい性質を持つ.

定理 3.4. (1) 任意の群 G に対し, acyclic closure $\iota_G: G \to G^{\mathrm{acy}}$ は 2-連結.
(2) A を有限生成群, B を有限表示可能な群とする. このとき, 任意の 2-連結な準同型 $f: A \to B$ は acyclic closure の同型 $\widetilde{f}: A^{\mathrm{acy}} \xrightarrow{\cong} B^{\mathrm{acy}}$ を誘導する.

定理 3.4 (1) と Stallings の定理から, 任意の群 G に対し,

$$\iota_G: N_k(G) \xrightarrow{\cong} N_k(G^{\mathrm{acy}})$$

となることがわかる. 以後この 2 つを同一視する.

注意 3.5. 一般には acyclic closure への準同型 ι_G は単射とは限らない. 例えば, G が完全群 (i.e. $G = [G, G]$) のとき, 自明な準同型 $G \to \{1\}$ は 2-連結となり, $G^{\mathrm{acy}} \cong \{1\}^{\mathrm{acy}} = \{1\}$ となる. 一方で, G が residually nilpotent (i.e. $\bigcap_{k \geq 2} \Gamma^k(G) = \{1\}$) のとき, べき零完備化への準同型 $G \to G^{\mathrm{nil}}$ は単射となるので, この準同型が ι_G を経由することを用いると ι_G の単射性が得られる. とくに, 自由群 F_k は residually nilpotent であり, $\iota_{F_k}: F_k \to F_k^{\mathrm{acy}}$ は単射となる.

例 3.6. $F_2 = \langle x_1, x_2 \rangle$ において, 準同型 $\psi: F_2 \to F_2$ を

$$\begin{cases} x_1 & \mapsto & x_1 x_2 x_1 x_2^{-1} x_1^{-1} \\ x_2 & \mapsto & x_2 \end{cases}$$

で定義すると, ψ は同型でない 2-連結準同型となっている. したがって定理 3.4 (2) より ψ は同型 $\widetilde{\psi}: F_2^{\mathrm{acy}} \to F_2^{\mathrm{acy}}$ を誘導する. 定理 3.3 で述べた acyclic closure の普遍性と, $F_n \hookrightarrow F_n^{\mathrm{acy}}$ であることを用いると, 一般に

$$\mathrm{Aut}(F_n) \subset \{\varphi: F_n \to F_n,\ 2\text{-連結}\} \hookrightarrow \mathrm{Aut}(F_n^{\mathrm{acy}})$$

となっていることがわかる. 上の $\widetilde{\psi}$ は $\mathrm{Aut}(F_2^{\mathrm{acy}}) \setminus \mathrm{Aut}(F_2)$ に属する元の例となっている.

この節のはじめで述べたことに話を戻すと, X 上のホモロジーシリンダー (M, i_+, i_-) に対し, $\pi_1 X$ の acyclic closure を用いて $\mathrm{Aut}(\pi_1 X^{\mathrm{acy}})$ の元 $\widetilde{i_+}^{-1} \circ \widetilde{i_-}$ を対応させることにより, モノイド準同型

$$\sigma^{\mathrm{acy}}: \mathcal{C}(X) \to \mathrm{Aut}(\pi_1 X^{\mathrm{acy}})$$

が得られ, これは群 $\mathcal{H}(X)$ を経由する. こうして, 可換図式

$$\begin{array}{ccccc} \sigma_k: \mathcal{C}(X) & \xrightarrow{\sigma^{\mathrm{acy}}} & \mathrm{Aut}(\pi_1 X^{\mathrm{acy}}) & \longrightarrow & \mathrm{Aut}(N_k(X)) \\ \uparrow & & \uparrow & & \| \\ \sigma_k: \mathcal{M}(X) & \xrightarrow{\sigma} & \mathrm{Aut}(\pi_1 X) & \longrightarrow & \mathrm{Aut}(N_k(X)) \end{array}$$

が得られた. 次の問題として以下が挙げられる.

問題 3.7. いろいろな多様体 X に対し, $\mathrm{Aut}(\pi_1 X^{\mathrm{acy}})$ の構造を調べ, 準同型 $\sigma^{\mathrm{acy}} : \mathcal{C}(X) \to \mathrm{Aut}(\pi_1 X^{\mathrm{acy}})$ についてその像を決定せよ. また, $\sigma^{\mathrm{acy}} : \mathcal{H}(X) \to \mathrm{Aut}(\pi_1 X^{\mathrm{acy}})$ の核はどうなっているか.

4. 群のホモロジーシリンダー

この節では, (いくつかの仮定の下で) ホモロジーシリンダーの構成を群のレベルで行うことによって, 群の acyclic closure の自己同型群が自然に現れることを見る. このことは, 前節において「??? に入るべきもの」として群の acyclic closure の自己同型群を用いたことの正当性に関するひとつの根拠を与えている.

以下, 群 G は有限表示可能かつ residually nilpotent であると仮定する. ($G = F_n$ の場合を想定している.) いま, 有限表示可能な群 A と 2 つの 2-連結準同型 $\varphi_+, \varphi_- : G \to A$ からなる 3 つ組 $(A, \varphi_+, \varphi_-)$ を考える. そのような 3 つ組たち $(A, \varphi_+, \varphi_-)$, $(A', \varphi'_+, \varphi'_-)$ が同型であることを, 同型写像 $\rho : A \xrightarrow{\cong} A'$ で図式

$$
\begin{tikzcd}
 & A \arrow[d, "\rho"', "\cong"] & \\
G \arrow[ur, "\varphi_+"] \arrow[dr, "\varphi'_+"'] & & G \arrow[ul, "\varphi_-"'] \arrow[dl, "\varphi'_-"] \\
 & A' &
\end{tikzcd}
$$

を可換にするようなものが存在することとして定める. $\mathcal{A}(G)$ をこのような 3 つ組の同型類のなす集合とする.

注意 4.1. Stallings の定理により, 任意の $(G, \varphi_+, \varphi_-)$ に対して φ_+, φ_- はべき零商, べき零完備化の同型を誘導する. ここで, G が residually nilpotent であるという仮定を用いると, $\varphi_+, \varphi_- : F \to G$ は単射であることが従う.

$\mathcal{A}(G)$ の上に

$$
\begin{array}{ccc}
\mathcal{A}(G) \times \mathcal{A}(G) & \to & \mathcal{A}(G) \\
\Psi & & \Psi \\
((A, \varphi_+, \varphi_-), (B, \psi_+, \psi_-)) & \mapsto & (A *_G B, \varphi_+, \psi_-)
\end{array}
$$

によって積構造を定義する. ここで, $A *_G B$ は φ_- と ψ_+ の融合積

$$
\begin{tikzcd}
G \arrow[r, "\varphi_-"] \arrow[d, "\psi_+"'] & A \arrow[d] \\
B \arrow[r] & A *_G B
\end{tikzcd}
$$

によって構成されるものである. φ_-, ψ_+ が単射であることより, 群の融合積に関するホモロジーの Mayer-Vietoris 完全系列が使え, 上の写像は well-defined となる. この写像によって $\mathcal{A}(G)$ に積構造が入り, $\mathcal{A}(G)$ は $(G, \mathrm{id}, \mathrm{id})$ を単位元とするモノイドになる.

例 4.2. G の 2-連結準同型 $\varphi : G \to G$ に対し, $(G, \mathrm{id}, \varphi)$ を考えることで $\mathcal{A}(G)$ の元を構成することができる. この対応は 2-連結準同型のモノイドから $\mathcal{A}(G)$ への単射モノイド準同型となっていることが容易に確かめられる.

2 つの $\mathcal{A}(G)$ の元 (A,φ_+,φ_-), (B,ψ_+,ψ_-) が**ホモロジー同境**であるということを, ある有限表示可能な群 C と 2-連結な準同型

$$\Phi : A \to C, \qquad \Psi : B \to C$$

であって図式

$$\begin{tikzcd} & A \arrow[d, "\Phi"] & \\ G \arrow[ur, "\varphi_+"] \arrow[dr, "\varphi'_+"'] & C & G \arrow[ul, "\varphi_-"'] \arrow[dl, "\varphi'_-"] \\ & B \arrow[u, "\Psi"'] & \end{tikzcd}$$

を可換にするようなものが存在することとして定める. $\mathcal{A}(G)$ をホモロジー同境による関係が生成する同値関係で割って得られる商を $\mathcal{B}(G)$ とおくと, $\mathcal{B}(G)$ には $\mathcal{A}(G)$ から誘導される群構造が入る. 実際, $\mathcal{A}(G)$ の積はホモロジー同境類を保ち, (A,φ_+,φ_-) の逆元は (A,φ_-,φ_+) で与えられる.

さて, ホモロジーシリンダーのときと同様,

$$\tau : \mathcal{A}(G) \to \mathrm{Aut}(G^{\mathrm{acy}}) \qquad ((A,\varphi_+,\varphi_-) \mapsto \widetilde{\varphi_+}^{-1} \circ \widetilde{\varphi_-})$$

と定めると, τ はモノイド準同型となり, 群 $\mathcal{B}(G)$ を経由する.

定理 4.3 ([12]). G を有限表示可能で residually nilpotent な群とするとき, $\tau : \mathcal{B}(G) \to \mathrm{Aut}(G^{\mathrm{acy}})$ は同型.

この定理の証明は Levine [8] によって与えられた G からはじまって G^{acy} に収束する有限表示可能な群と 2-連結な準同型の列を用いて $\mathrm{Aut}(G^{\mathrm{acy}})$ の元を「近似」することで得られる.

例 4.4. 例 3.6 で述べた 2-連結準同型 $\psi : F_2 \to F_2$ に対し, $\tau(F_2, \mathrm{id}, \psi) = \widetilde{\psi}$.

5. 曲面上のホモロジーシリンダーと Dehn-Nielsen 型の定理

この節では, X が向き付けられた種数 g の閉曲面から開円板を 1 つ除いた曲面 $\Sigma_{g,1}$ の場合に問題 3.7 を考察する. $\Sigma_{g,1}$ 上のホモロジーシリンダーの研究は Goussarov [5], Habiro [6], Garoufalidis-Levine [4], Levine [10] に起源をもち, clover や clasper を用いた有限型不変量との関係とともに理論が構築されていった. 本研究はこれらをきっかけとしている.

図 3 のように $\pi_1\Sigma_{g,1} \cong F_{2g}$ の生成系をとると, 境界を 1 周するループ ζ は $\prod_{i=1}^{g}[\gamma_i,\gamma_{g+i}]$ と表される.

$\Sigma_{g,1}$ については, 恒等写像とホモトピックな微分同相は恒等写像にアイソトピックであることが知られているので, 注意 2.3 で述べたことと併せて, $\mathcal{M}(\Sigma_{g,1}) \to \mathcal{C}(\Sigma_{g,1})$ は単射となることが従う. いま考えたい可換図式

$$\begin{tikzcd} \sigma_k : \mathcal{C}(\Sigma_{g,1}) \arrow[r, "\sigma^{\mathrm{acy}}"] & \mathrm{Aut}(F_{2g}^{\mathrm{acy}}) \arrow[r] & \mathrm{Aut}(N_k(F_{2g})) \\ \sigma_k : \mathcal{M}(\Sigma_{g,1}) \arrow[r, "\sigma"] \arrow[u, hook] & \mathrm{Aut}(F_{2g}) \arrow[r] \arrow[u, hook] & \mathrm{Aut}(N_k(F_{2g})) \arrow[u, equal] \end{tikzcd}$$

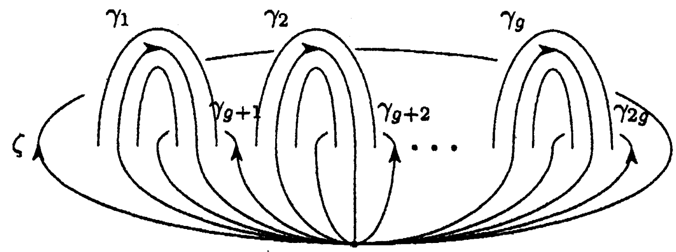

FIGURE 3. 曲面 $\Sigma_{g,1}$ とその基本群の生成系 $\{\gamma_1,\ldots,\gamma_{2g}\}$

において，これまでに以下の事実が知られていた．

定理 5.1 (Dehn-Nielsen). $\sigma:\mathcal{M}(\Sigma_{g,1})\to\mathrm{Aut}(F_{2g})$ は単射で，

$$\mathrm{Im}\,\sigma=\{\varphi\in\mathrm{Aut}(F_{2g})\mid\varphi(\zeta)=\zeta\}.$$

定理 5.2 (Garoufalidis-Levine [4]). 各 $k\geq 2$ に対し，

$$\begin{aligned}&\mathrm{Im}(\sigma_k:\mathcal{C}(\Sigma_{g,1})\to\mathrm{Aut}(N_k(F_{2g})))\\&=\left\{\varphi\in\mathrm{Aut}(N_k(F_{2g}))\;\middle|\;\begin{array}{c}\widetilde{\varphi}(\zeta)\equiv\zeta \bmod \Gamma^{k+1}(F_{2g})\text{ となる}\\\varphi\text{ のリフト }\widetilde{\varphi}:F_{2g}\to F_{2g}\text{ が存在する．}\end{array}\right\}.\end{aligned}$$

なお，$\mathrm{Im}(\sigma_k:\mathcal{M}(\Sigma_{g,1})\to\mathrm{Aut}(N_k(F_{2g})))$ や $\mathrm{Im}(\mathrm{Aut}(F_n)\to\mathrm{Aut}(N_k(F_n)))$ については，写像類群や $\mathrm{Aut}(F_n)$ に対する Johnson 準同型の像の決定と等価であり，重要な未解決問題となっている ([11] や [13] を参照).

本稿における主定理の 1 つ目は以下に述べる $\Sigma_{g,1}$ 上のホモロジーシリンダーに対する Dehn-Nielsen 型の定理であり，定理 5.1, 5.2 のひとつの一般化となっている．

定理 5.3 ([12]). $\sigma^{\mathrm{acy}}:\mathcal{C}(\Sigma_{g,1})\to\mathrm{Aut}(F_{2g}^{\mathrm{acy}})$ に関して，

$$\mathrm{Im}\,\sigma^{\mathrm{acy}}=\{\widetilde{\varphi}\in\mathrm{Aut}(F_{2g}^{\mathrm{acy}})\mid\widetilde{\varphi}(\zeta)=\zeta\in F_{2g}^{\mathrm{acy}}\}.$$

証明は定理 5.2 の証明に帰着させることが鍵となるが，$F_{2g}\to N_k(F_{2g})$ が全射であるのに対し，$F_{2g}\to F_{2g}^{\mathrm{acy}}$ は単射という大きな違いがあるので，いくつかの点で注意が必要となっている．それを回避するために acyclic closure の性質をうまく使う必要がある．

注意 5.4. $\mathcal{M}(\Sigma_{g,1})$ の場合と異なり，σ^{acy} は $\mathcal{H}(\Sigma_{g,1})$ 上においても単射とはなっていない．例として，自明なホモロジーシリンダー $(\Sigma_{g,1}\times I,\mathrm{id}\times\{1\},\mathrm{id}\times\{0\})$ に S^3 とホモロジー同境でないホモロジー 3 球面 Y を連結和して得られるホモロジーシリンダー $((\Sigma_{g,1}\times I)\#Y,\mathrm{id}\times\{1\},\mathrm{id}\times\{0\})$ は非自明な $\mathrm{Ker}\,\sigma^{\mathrm{acy}}(\subset\mathcal{H}(\Sigma_{g,1}))$ の元となっている．さらに，準同型 $\rho:\mathrm{Ker}\,\sigma^{\mathrm{acy}}\to\mathbb{R}$ であって，$\rho(((\Sigma_{g,1}\times I)\#Y,\mathrm{id}\times\{1\},\mathrm{id}\times\{0\}))=0$, $\mathrm{Im}\,\rho$ が $\mathbb{R}$ の中で稠密かつ無限生成となるようなものを Atiyah-Patodi-Singer の ρ-不変量を応用することで構成できることがわかっている．$\mathrm{Ker}\,\sigma^{\mathrm{acy}}$ は，$\mathcal{H}(\Sigma_{g,1})$ から σ^{acy} によって代数的部分を取り除いた位相的部分として，非常に興味深い対象となっている．

6. $(\#_n(S^1\times S^l))\setminus\mathrm{Int}(D^{l+1})$ $(l\geq 2)$ 上のホモロジーシリンダーと $\mathrm{Aut}(F_n^{\mathrm{acy}})$

前節に続いて，この節では $X=(\#_n(S^1\times S^l))\setminus\mathrm{Int}(D^{l+1})$ $(l\geq 2)$ の場合について述べる．$l=1$ のときは $(\#_n(S^1\times S^1))\setminus\mathrm{Int}(D^2)=\Sigma_{n,1}$ であるから，この節の内容は前節の高次元化とみることができる．可換図式

$$\begin{array}{ccccc}
\sigma_k: \mathcal{C}(X) & \xrightarrow{\sigma^{\mathrm{acy}}} & \mathrm{Aut}(F_n^{\mathrm{acy}}) & \longrightarrow & \mathrm{Aut}(N_k(F_n)) \\
\uparrow & & \uparrow & & \| \\
\sigma_k: \mathcal{M}(X) & \xrightarrow{\sigma} & \mathrm{Aut}(F_n) & \longrightarrow & \mathrm{Aut}(N_k(F_n))
\end{array}$$

に関連して, $l=2$ のときは次のことが知られている.

定理 6.1 (Laudenbach [7]). $l=2$ のとき,
(1) 恒等写像とホモトピックな $X=(\#_n(S^1\times S^2))\setminus \mathrm{Int}(D^3)$ の微分同相は恒等写像にアイソトピックである. とくに, $\mathcal{M}(X)\to\mathcal{C}(X)$ は単射.
(2) $\sigma:\mathcal{M}(X)\to \mathrm{Aut}F_n$ は全射.

主定理の 2 つ目は以下のとおり.

定理 6.2. (1) 各 $k\geq 2$ に対し, 自然な準同型 $\mathrm{Aut}(F_n^{\mathrm{acy}})\to\mathrm{Aut}(N_k(F_n))$ は全射.
(2) 各 $l\geq 2$ について $\sigma^{\mathrm{acy}}:\mathcal{C}(X)\to\mathrm{Aut}(F_n^{\mathrm{acy}})$ は全射.

証明は大筋は定理 5.3 のものと同じであるが, 次元が高くなったため, 後半の議論 (定理 5.2 の証明に帰着させたあと) はこちらの方が易しくなっている.

7. 課題

おわりに, 自由群の acyclic closure に関して懸案となっている問題を挙げる.

問題 7.1. F_n^{acy} や $\mathrm{Aut}(F_n^{\mathrm{acy}})$ は有限生成か?

$\mathcal{C}(\Sigma_{g,1})$ や $\mathcal{H}(\Sigma_{g,1})$ についても有限生成かどうかわかっていない. たとえこれらが有限生成でなかったとしても, うまい生成系を見つけることができたらよいなと思う.

問題 7.2. 自然な準同型 $F_n^{\mathrm{acy}}\to F_n^{\mathrm{nil}}=(F_n^{\mathrm{acy}})^{\mathrm{nil}}$ は単射か?

この単射性は F_n^{acy} が residually nilpotent であるということと同値である.

問題 7.3. $H_3(F_n^{\mathrm{acy}})$ を決定せよ.

定理 3.4 で見たように, $\iota_{F_n}:F_n\to F_n^{\mathrm{acy}}$ は 2-連結であるから $H_1(F_n^{\mathrm{acy}})=H_1(F_n)=\mathbb{Z}^n$, $H_2(F_n^{\mathrm{acy}})=H_2(F_n)=0$ となっている. ちなみに, [12] においてボルディズム群を用いることにより, 全射

$$\mathrm{Ker}\left(\sigma^{\mathrm{acy}}:\mathcal{C}(\Sigma_{g,1})\to\mathrm{Aut}(F_{2g}^{\mathrm{acy}})\right)\twoheadrightarrow H_3(F_{2g}^{\mathrm{acy}})$$

が構成されているが, $H_3(F_{2g}^{\mathrm{acy}})$ が非自明かどうかさえわかっていないので, この準同型の効力もまたよくわかっていない.

References

[1] A. Bousfield, *Homological localization towers for groups and π-modules*, Mem. Amer. Math. Soc. 186 (1977)
[2] K. Brown, *Cohomology of Groups*, Graduate Texts in Mathematics 87, Springer-Verlag, 1982.
[3] J. C. Cha, *Injectivity theorems and algebraic closures of groups with coefficients*, preprint, arXiv:math/0609409
[4] S. Garoufalidis, J. Levine, *Tree-level invariants of three-manifolds, Massey products and the Johnson homomorphism*, Proc. Sympos. Pure Math. 73 (2005), 173–205

[5] M. Goussarov, *Finite type invariants and n-equivalence of 3-manifolds*, C. R. Math. Acad. Sci. Paris 329 (1999), 517–522

[6] K. Habiro, *Claspers and finite type invariants of links*, Geom. Topol. 4 (2000), 1–83

[7] F. Laudenbach, *Topologie de la dimension trois: homotopie et isotopie*, Astérisque 12, Société Mathématique de France, Paris (1974)

[8] J. Levine, *Link concordance and algebraic closure, II*, Invent. Math. 96 (1989), 571–592

[9] J. Levine, *Algebraic closure of groups*, Contemp. Math. 109 (1990), 99–105

[10] J. Levine, *Homology cylinders: an enlargement of the mapping class group*, Algebr. Geom. Topol. 1 (2001), 243–270

[11] S. Morita, *Abelian quotients of subgroups of the mapping class group of surfaces*, Duke Math. J. 70 (1993), 699–726

[12] T. Sakasai, *Homology cylinders and the acyclic closure of a free group*, Algebraic & Geometric Topology 6 (2006), 603–631

[13] T. Satoh, *New obstructions for the surjectivity of the Johnson homomorphism of the automorphism group of a free group*, J. London Math. Soc. (2) 74 (2006) 341–360

[14] J. Stallings, *Homology and central series of groups*, J. Algebra 2 (1965), 170–181

逆井卓也 (さかさいたくや)
〒 153-8914 東京都目黒区駒場 3-8-1
東京大学大学院数理科学研究科
sakasai@ms.u-tokyo.ac.jp